Cvičení MAI 3 – Konvergence řad funkcí I.

Stručný přehled teorie:

Definice: $f, f_n : M \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ $(M \neq \emptyset)$, $n \in N$

symbol $\sum_1^\infty f_n$ chápeme jako způsob zápisu limity posloupnosti částečných součtů $\{s_k\} = \{\sum_{n=1}^{k} f_n\}$ řady $\sum_1^\infty f_n$

1. $\sum_1^\infty f_n \to f$ na M (bodová konvergence), když $s_n \to f$ na M (bodově)
2. $\sum_1^\infty f_n \rightrightarrows f$ na M (stejnoměrná konvergence), když $s_n \rightrightarrows f$ na M (stejnoměrně)
3. $\sum_1^\infty f_n \overset{lc}{\rightrightarrows} f$ na M (lokálně stejnoměrně), když $s_n \overset{lc}{\rightrightarrows} f$ na M (lok. stejn. k)

Limita, spojitost, integrování a derivování řad funkcí

(při stejnoměrné konvergenci lze s nekonečnými řadami „zacházet" jako s konečnými součty)

1. záměna pořadí limity a sumace:

$$\left.\begin{array}{l} \forall n \ \ f_n : P(x_0,\delta) \to \mathbb{R}(\mathbb{C}) \\ \forall n \ \text{ex.} \lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) \in R \\ \sum_1^\infty f_n \rightrightarrows \text{ na } P(x_0,\delta) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{ex. } \lim\limits_{x\to x_0} \sum_1^\infty f_n(x) \in R, \ \sum_1^\infty \lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) \text{ konv.} \\ \text{a platí} \\ \lim\limits_{x\to x_0} \sum_1^\infty f_n(x) = \sum_1^\infty \lim f_n(x) \end{array}$$

Důsledek:

$$\left.\begin{array}{l} \sum_1^\infty f_n \overset{lc}{\rightrightarrows} \text{ na } (a,b) \\ f_n : (a,b) \to \mathbb{R}(\mathbb{C}) \text{ jsou spojité na } (a,b) \ (n\in N) \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_1^\infty f_n(x) \text{ je spojitá fce na } (a,b)$$

2. záměna pořadí sumace a integrování:

$$\left.\begin{array}{l} \forall n \ \ f_n \in R(\langle a,b\rangle) \\ \sum_1^\infty f_n \rightrightarrows \text{ na } \langle a,b\rangle \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \sum_1^\infty f_n \in R(\langle a,b\rangle) \text{ a platí} \\ \int_a^b \left(\sum f_n\right) = \sum_1^\infty \int_a^b f_n \end{array}$$

3. záměna pořadí sumace a derivování

$f_n : (a,b) \to \mathbb{R}$, ex. $f_n' \in \mathbb{R}$ na (a,b), $n \in \mathbb{N}$, (a,b) – omezený interval
$\sum f_n' \overset{lok}{\rightrightarrows} g$ na (a,b)
číselná řada $\sum_1^\infty f_n(x_0)$ konverguje aspoň pro jeden bod $x_0 \in (a,b)$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_1^\infty f_n \overset{lok}{\rightrightarrows} f$ na (a,b) pro nějakou fci $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ a platí
$f' = g$ na (a,b), tj. $\left(\sum_1^\infty f_n\right)' = \sum_1^\infty f_n'$.

Vyšetřování konvergence řad funkcí $\sum_1^\infty f_n$

1. bodová konvergence na M – viz vyšetřování konvergence číselných řad

2. stejnoměrná konvergence na M

(i) nutná podmínka stejnoměrné konvergence:

$\sum f_n \rightrightarrows$ na $M \Rightarrow f_n \rightrightarrows 0$ na M

tedy: $\sum f_n$ nekonverguje stejnoměrně na M, pokud $f_n \not\rightrightarrows 0$ na M

(ii) postačující podmínky pro stejnoměrnou konvergenci

1. (Weierstrass)

$f_n : M \to \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$, $n \in \mathbb{N}$,
$\sum_1^\infty \sup_{x \in M} |f_n(x)|$ konverg. $\Bigg\} \Rightarrow \sum_1^\infty f_n \rightrightarrows$ na M
(a také absolutně k.)

neboli také: $|f_n(x)| \le d_n$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in M$
$\sum_1^\infty d_n$ konverg. $\Bigg\} \Rightarrow \sum_1^\infty f_n \rightrightarrows$ na M
(a také absolutně k.)

2. (Dini) – viz přednáška

3. (Abel a Dirichlet) (neabsolutní stejn. konvergence)

$f_n, g_n : M \to \mathbb{R}$, pak $\sum f_n g_n \rightrightarrows$ na M, když jsou splněny podmínky (i) nebo (ii)

(i) (Abel) $\sum_1^\infty f_n \rightrightarrows$ na M a posloupnost $\{g_n\}$ je na M stejně omezená a pro každé $x \in M$ je $\{g_n(x)\}$ monotónní

(ii) (Dirichlet)
$\sum_1^\infty f_n$ má na M stejně omezené částečné součty,
$g_n \rightrightarrows 0$ na M a pro každé $x \in M$ je posloupnost $\{g_n(x)\}$ monotónní

(iii) nutná a postačující podmínka stejnoměrné konvergence

Bolzano – Cauchyova (stejnoměrná) podmínka:

$f_n : M \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, $\sum_1^\infty f_n \rightrightarrows$ na M $\Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall p \in N\ \forall x \in M: \left| \sum_{n_0}^{n_0+p} f_n \right| < \varepsilon$

3. lokálně stejnoměrná konvergence

(i) $f_n : (a,b) \to \mathbb{R}$
$\sum_1^\infty f_n \rightrightarrows$ na každém int. $\langle \alpha, \beta \rangle \subset (a,b) \Rightarrow \sum_1^\infty f_n \overset{lo}{\rightrightarrows}$ na (a,b)

(ii) $\sum f_n \overset{lo}{\rightrightarrows}$ na $(a,b) \Rightarrow \sum f_n \rightrightarrows$ na každém int. $\langle \alpha, \beta \rangle \subset (a,b)$

Příklady řešení

(1.) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ (jednoduchý příklad – na základní postupy)

(i) bodová konvergence:

$\sum_1^{\infty} x^n$ konv. (i abs.) $\Leftrightarrow$ $|x|<1$ (geom. řada) a

$\sum_1^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$, $x\in(-1,1)$

(ii) stejnoměrná konvergence v $(-1,1)$:

$x^n \not\rightrightarrows 0$ na $(-1,1)$ (viz příkl. na konvergenci posloupností fcí)

($\sup_{x\in(-1,1)} |x^n| = 1 \not\to 0$)

$\Rightarrow$ $\sum_1^{\infty} x^n \not\rightrightarrows$ na $(-1,1)$

(iii) lokálně stejnoměrná konvergence v $(-1,1)$

$|x| \leq a < 1$ $(a>0)$. $|x^n| \leq a^n$, $\sum_1^{\infty} a^n$ konv. $\Rightarrow$ (Weierstrass)

$\Rightarrow$ $\sum_1^{\infty} x^n \rightrightarrows$ v každém int. $\langle -a,a\rangle$ $(0<a<1)$, tedy

$\sum_1^{\infty} x^n \overset{loc}{\rightrightarrows}$ v $(-1,1)$

Poznámka: $\sum_1^{\infty} x^n$ nekonverguje na žádném okolí bodu 1
(tj. na žádném int. $(\varepsilon,1)$ (kde $0<\varepsilon<1$));

sporem: kdyby $\sum_1^{\infty} x^n \rightrightarrows$ na $(\varepsilon,1)$, pak, protože
a. $\lim_{x\to 1-} x^n = 1$, by musela konvergovat i řada

$\sum_1^{\infty} \lim_{x\to 1-} x^n = \sum_1^{\infty} 1$ – spor

(viz věta o záměně sumace a limity)
(stejně pro int. $(-1,-\varepsilon)$)

② Jednoduché příklady na užití Weierstrassova kritéria

(i) $\sum_{1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$: bodově konverguje v $\langle -1,1\rangle$, jinde diverguje (viz vyšetřování číselných řad): v $\langle -1,1\rangle$ konverguje absolutně

(*) srovnávací krit.: $x \in \langle -1,1\rangle$: $\left|\frac{x^n}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$, $\sum \frac{1}{n^2}$ k. $\Rightarrow$

$\sum \frac{x^n}{n^2}$ k. ab. v $\langle -1,1\rangle$

pro $|x|>1$ $\frac{x^n}{n^2}$ nemá limitu 0, tedy $\sum_{1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ diverguje

stejnoměrná konvergence na $\langle -1,1\rangle$ plyne též z (*) (Weierstrass)

(ii) $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{x^4+n^2} \rightrightarrows$ v R:

$0 \le \frac{1}{x^4+n^2} \le \frac{1}{n^2}$ $\forall x \in R$, $\sum \frac{1}{n^2}$ k. $\Rightarrow \sum \rightrightarrows$ v R (Weierstrass jako v (i))

(iii) $\sum_{1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3} \rightrightarrows$ v R:

$\forall x \in R$: $\left|\frac{\sin nx}{n^3}\right| \le \frac{1}{n^3}$, $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ k. $\Rightarrow$ (Weierstrass) $\sum \frac{\sin nx}{n^3} \rightrightarrows$ v R

③ Lokálně stejnoměrná konvergence

$\sum_{1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$: obor konvergence ... $\langle -1,1)$:

pro $|x|<1$ je $\left|\frac{x^n}{n}\right| \le |x|^n$, $\sum |x^n|$ konverguje pro $|x|<1$

$\Rightarrow \sum_{1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ konv. ab. v $(-1,1)$

$x=1$ .. $\sum \frac{1}{n}$ diverguje, $x=-1$ $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ k. (Leibniz)

pro $|x|>1$ není limita posl. $\{\frac{x^n}{n}\}$ nula – tedy ř. div.

lok. stejnoměrná konvergence:

pro $|x| \le a < 1$ ... $\left|\frac{x^n}{n}\right| \le \frac{a^n}{n}$, $\sum \frac{a^n}{n}$ konverguje $\Big\}$ $\overset{\text{Weier.}}{\Rightarrow}$ $\sum_1^\infty \frac{x^n}{n} \rightrightarrows$ v každém int. $\langle -a, a\rangle$, $0<a<1$

tedy, $\sum_1^\infty \frac{x^n}{n} \overset{lok}{\rightrightarrows}$ v $(-1,1)$

stejnoměrná konvergence (*) $\left|\frac{x^n}{n}\right| \le \frac{1}{n} \to 0$ pro $\forall x \in (-1,1)$, ale řada nekonverguje stejnoměrně v žádném okolí bodu 1,

(i když $\frac{x^n}{n} \rightrightarrows 0$ v $(-1,1)$ – není podmínka postačující pro stejnoměrnou konvergenci Σ)
(z (*))

neboť: (sporem) kdyby $\Sigma \rightrightarrows$ v okolí bodu 1 ... $(\varepsilon, 1)$, $0<\varepsilon<1$, pak by konvergovala i $\sum_1^\infty \lim_{x\to 1-} \frac{x^n}{n} = \sum_1^\infty \frac{1}{n}$ – spor

ale konverguje stejnoměrně na int. $(-1,-\varepsilon)$ $(\varepsilon \in (0,1))$

Abelovo kritérium: $\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n} \rightrightarrows$ (číselná řada, tedy na $(-1,-\varepsilon)$ konvergence je stejn.)

$a_n(x) = (-x)^n < 1$, tedy $\{(-x)^n\}$ je stejně omezená na $(-1,-\varepsilon)$
$(0<-x<1)$

a $a_n(x) = (-x)^n$ je klesající na $(-1,-\varepsilon)$,

tedy $\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n} \cdot (-x)^n = \sum_1^\infty \frac{x^n}{n} \rightrightarrows$ na $(-1,-\varepsilon)$

odtud: záměna sumace a limity: (viz příslušná věta)

$$\lim_{x\to -1+} \sum_1^\infty \frac{x^n}{n} = \sum_1^\infty \lim_{x \to -1+} \frac{x^n}{n} = \sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n} \quad (= -\ln 2 \text{ – později})$$

tedy součet řady je fce spojitá na int. $\langle -1, 1)$ (uvnitř spojitá dle věty o spojitosti součtu lok. stejn. konvergentní řady spojitých fcí)

<u>Součet řady $\sum_1^\infty \frac{x^n}{n}$</u> :

Řada derivací $\sum_1^\infty \left(\frac{x^n}{n}\right)' = \sum_1^\infty x^{n-1} = \sum_0^\infty x^n$ je
lokálně stejnoměrně konvergentní v $(-1,1)$ (viz př. 1) } $\Rightarrow$ (věta o záměně sumace a derivace)

$\sum_1^\infty \frac{x^n}{n}$ konverguje v $(-1,1)$

$$\left(\sum_1^\infty \frac{x^n}{n}\right)' = \sum_1^\infty \left(\frac{x^n}{n}\right)' = \sum_0^\infty x^n = \frac{1}{1-x} \quad v\ (-1,1),$$

tedy $\sum_1^\infty \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x) + c$ v $(-1,1)$ (+)

pro $x=0$: $0 = -\ln 1 + c \Rightarrow c = 0$,

tj. $\sum_1^\infty \frac{x^n}{n} = \ln\frac{1}{1-x}$, $x \in (-1,1)$

ze spojitosti v $-1+$ (obou stran rovnosti) plyne, že i pro $x=-1$ platí:

$$\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n} = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$$

(tedy, $\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$)

Platí tedy v $\langle -1,1)$: $\sum_1^\infty \frac{x^n}{n} = \ln\frac{1}{1-x}$

<u>Poznámka</u>: řada $\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ ($=\ln 2$) nekonverguje moc rychle, lépe se počítá $\ln 2 = -\ln\frac{1}{2} = -\ln\left(1-\frac{1}{2}\right) = \sum_1^\infty \frac{1}{n2^n}$ (viz +) (konverguje rychleji)

4 <u>DÚ</u>: Vyzkoušejte podobné vyšetření i řadu $\sum_0^\infty \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$.

($\Rightarrow$ $\operatorname{arctg} x$ na $\langle -1,1\rangle$)

Spočtěte $\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1}$ $\left(=\frac{\pi}{4}\right)$

⑤ $\sum_{1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right) \quad \left(\overset{loc}{\rightrightarrows} \text{ na } R\right)$

bodová konvergence: $0 \le \ln\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right) \le \frac{x^2}{n^2}$, $x \in R, n \in N$ $\Big\} \Rightarrow$
$\sum_{1}^{\infty} \frac{x^2}{n^2}$ konverguje pro každé $x \in R$

$\underset{\text{srovnávací krit.}}{\Longrightarrow}$ $\sum_{1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right)$ bodově konverguje v R

lok. stejnoměrná konvergence:
buď $a>0$, $|x| \le a$ $\quad 0 \le \ln\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right) \le \frac{x^2}{n^2} \le \frac{a^2}{n^2} \Rightarrow$
$\underset{\text{(Weierst)}}{\Longrightarrow}$ $\sum_{1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right) \rightrightarrows$ na $\langle -a, a\rangle$ pro každé $a>0$,
$\Longrightarrow$ $\sum_{1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right) \overset{loc}{\rightrightarrows}$ na R

konvergence není stejnoměrná na R:
neboť $\ln\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right) \underset{n\to\infty}{\to} 0$ bodově (na R),
ale ne stejnoměrně $\left(\sup_{x\in R} \ln\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right) = +\infty \to +\infty ! \right)$

⑥ DU : Vyšetřete podobně bodovou, stejnoměrnou, případně lokálně stejnoměrnou konvergenci řady

(i) $\sum_{1}^{\infty} \sin \frac{x}{2^n}$ (bodově k. v R, $\rightrightarrows$ v $\langle -a,a\rangle$ pro $\forall a>0$, ne $\rightrightarrows$ v R, $\overset{loc}{\rightrightarrows}$ v R)

(ii) $\sum_{1}^{\infty} (x^n - x^{n+1})$ (bodově v $(-1,1\rangle$, $\overset{loc}{\rightrightarrows}$ v $(-1,1)$,
nekonverguje stejnoměrně na žádném int. $(\varepsilon, 1)$ $(0<\varepsilon<1)$, i když
$x^n - x^{n+1} \rightrightarrows 0$ na $\langle 0,1\rangle$)

(iii) $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n(x+2)^n}$: bodově konverg. na $(-\infty,-3\rangle \cup (-1,+\infty)$,
$\overset{loc}{\rightrightarrows}$ na $(-\infty,-3) \cup (-1,+\infty)$, nekonv. stejn. na žádném okolí (prstencovém) bodu (-1).

(7) $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}$ – 1) vyšetřit obor konvergence
2) konverguje řada na oboru konvergence stejnoměrně nebo aspoň lokálně stejnoměrně?

Bodová konvergence: $x=0$ ... řada konverguje

pro $x \neq 0$ $\quad \left| \frac{x}{n(1+nx^2)} \right| \leq \frac{|x|}{n^2x^2} = \frac{1}{n^2|x|}$ (*) $\Bigg\}$ $\Rightarrow$

$\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2|x|}$ konverg.

$\Rightarrow$ dané řada konverguje (dokonce absolutně) v R

stejnoměrná konvergence

odhadu (*) lze použít pro $|x| \geq a > 0$: $\left| \frac{x}{n(1+nx^2)} \right| \leq \frac{1}{n^2 a}$, $\Bigg\}$ $\Rightarrow$

$\sum \frac{1}{n^2 a}$ konvg.

$\Rightarrow$ řada $\rightrightarrows$ na intervalech $(-\infty, -a\rangle$ a $\langle a, +\infty)$, $a>0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ řada $\overset{loc}{\rightrightarrows}$ na $(-\infty, 0)$ a $(0, +\infty)$

odhad (*) ale nelze užít v okolí 0 : pro $x \to 0$ ... $\frac{1}{n^2|x|} \to +\infty$

je nutné se pokusit o přesnější "vyšetření" funkcí

$\sup\limits_{x\in R} |f_n(x)|$ $\left(= \max\limits_{x\in R} |f_n(x)| \text{ zde} \right)$:

$f_n(x)$ jsou funkce spojité na R, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f_n(x) = 0 = f(0)$, $\Big\}$ $\Rightarrow$

$f_n'(x) = 0 \iff x_n = \pm \frac{1}{\sqrt{n}}$, ($f_n$ jsou liché fce)

$\max\limits_{x\in R} |f_n(x)| = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2n\sqrt{n}}$ $\Bigg\}$ $\rightrightarrows$ (Weierstrass)

$\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{2n\sqrt{n}}$ konvg.

$\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)} \rightrightarrows$ na R

(8) Označme $\sum_{1}^{\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)} = f(x)$, $x \in R$ (příklad 7)

Protože $\sum_{1}^{\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)} \rightrightarrows f(x)$ na R, tak (věty o záměně sumace a ....)

(i) $f(x)$ je spojitá fce v R (neboť $\frac{x}{n(1+nx^2)} = f_n(x)$ jsou fce spojité na R)

(ii) $$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \sum_{1}^{\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)} = \sum_{1}^{\infty} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)} = \sum_{1}^{\infty} 0 = 0$$

(iii) $$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \left(\sum_{1}^{\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}\right) dx = \sum_{1}^{\infty} \int_0^1 \frac{x}{n(1+nx^2)}\,dx =$$

$$= \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2n^2} \int_0^1 \frac{2nx}{1+nx^2}\,dx = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2n^2} \left[\ln(1+nx^2)\right]_0^1 =$$

$$= \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2n^2} \ln(1+n)$$

Pozn.: Z věty o záměně sumace a integrálu víme, že ($\sum f_n \rightrightarrows$ na $\langle 0,1\rangle$) $f \in R(\langle 0,1\rangle)$ a $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2n^2} \ln(1+n)$ konverguje (což nemusíme zjišťovat);
pokuste se vyšetřit konvergenci řady $\sum \frac{1}{2n^2} \ln(1+n)$ přímo.

(iv) v R lze vyjádřit i primitivní fci k $f(x)$:

$$\int \left(\sum_{1}^{\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}\right) dx = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2n^2} \int \frac{2nx}{1+nx^2}\,dx =$$

$$= \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2n^2} \ln(1+nx^2) + c$$ – víme, že řada konverguje stejnoměrně na každém omezeném intervalu $\langle a,b\rangle \subset R$, tedy lokálně stejn. v R

Pokuste se (jako cvičení) toto vyšetřit i přímo!

(9) Neabsolutní stejnoměrná konvergence

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\sin x} \rightrightarrows \text{ v } R:$$

Dirichletovo kritérium, zde spec. Leibnizovo kritérium pro stejnoměrnou konvergenci:

$$\frac{1}{n+\sin x} \leq \frac{1}{n-1} \text{ pro } \forall x \in R \Rightarrow \frac{1}{n+\sin x} \rightrightarrows 0 \text{ v } R$$
$n = 2, 3, \dots$

$\left\{\frac{1}{n+\sin x}\right\}_2^{\infty}$ je klesající pro každé $x \in R$ $\Rightarrow$

(a $\sum_{1}^{\infty}(-1)^n$ má omezenou (stejně) posloupnost částečných součtu – (Leibniz))

$$\sum_{2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\sin x} \rightrightarrows \text{ v } R$$

(10) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2} \rightrightarrows \text{ v } R$$ (ukažte stejně, jako v příkl. 9)

opět: 1) $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2}$ je funkce spojitá v R

2) $$\lim_{x\to\pm\infty} \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2} = \sum_{1}^{\infty} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2} = 0$$

3) k $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2}$ existuje na R primitivní funkce a

$$\int \left(\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2}\right) dx = \sum_{1}^{\infty} (-1)^n \int \frac{1}{n+x^2}\, dx =$$

$$= \sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{n}} + c, \quad x \in R$$

pokračování $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{n}} \rightrightarrows$ na R :

(Abelovo kritérium): $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ konverguje (stejnoměrně)

$n \in N$, $\left|\operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{n}}\right| \leq \frac{\pi}{2}$ v R (stejně omezená posloupnost v R)

a $\left\{\operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{n}}\right\}_1^{\infty}$ je pro každé $x \in R$ monotónní

4) $$\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^k}{k+x^2}\right)' = \sum_{1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2x}{(k+x^2)^2}$$

na int. $\langle -a, a\rangle$, $a>0$: $\left|\frac{(-1)^{k+1} \cdot 2x}{(k+x^2)^2}\right| \leq \frac{2a}{k^2}$, $\left.\begin{array}{l} \\ \displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{2a}{k^2} \text{ konverguje} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \displaystyle\sum_{1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2x}{(k+x^2)^2}$ konverguje stejnoměrně na každém omezeném intervalu (α, β) (a tedy lok. stejnoměrně na R)

tedy: $$\left(\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+x^2}\right)' = \sum_{1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2x}{(k+x^2)^2} \quad \text{v } R$$

(věta o záměně sumace a derivování)

(11) Dú! Pomocí nekonečné řady vyjádřete

$$\int_0^1 \left(\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2+k^2}\right) dx \qquad \left(= \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{k} \operatorname{arctg} \frac{1}{k}\right)$$

(Zkuste ukázat nezávisle na větě o záměně sumace a R-integrálu konvergenci výsledné řady)

(12) **Dú:** Spočítejte $\lim_{x \to 1} \sum \frac{(-1)^n}{n} \cdot \frac{x^n}{x^n+1}$.

(řada konverguje stejnoměrně na $(0,+\infty)$ – Abelovo kritérium,
$\lim_{x\to 1} \sum_1^\infty \ldots = \sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{2n} = -\frac{1}{2}\ln 2$)

(13) **Dú:** Spočítejte $\lim_{x \to 0+} \sum_1^\infty \frac{1}{2^n \cdot n^x}$.

(řada konverguje stejnoměrně na $(0,+\infty)$ – Weierstrass –
– tedy $\lim_{x\to 0+} \sum_1^\infty \ldots = \sum_1^\infty \frac{1}{2^n} = 1$)

(14) **Dú:** Ukažte, že funkce $f(x) = \sum_1^\infty \frac{1}{n^x}$ má na intervalu $(1,+\infty)$ derivaci (dokonce derivace všech řádů).

(řada derivací konverguje lokálně stejnoměrně na intervalu $(1,+\infty)$ – dokažte, že konverguje stejnoměrně na každém intervalu $\langle a,+\infty)$, $a>0$ (Weierstrass), k odhadu derivace

$$\left(\frac{1}{n^x}\right)' = \frac{-\ln n}{n^x} \quad \text{na intervalu } \langle a,+\infty)$$

lze užít omezenosti shora posloupnosti $\left\{\frac{\ln n}{n^\varepsilon}\right\}$ pro lib. $\varepsilon>0$ – $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^\varepsilon} = 0$)